

Tài liệu bài giảng:

01. MỞ ĐẦU VỀ LŨY THỪA

Thầy Đặng Việt Hùng

1) Khái niệm về Lũy thừa

- Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a.a...a$, với n là số tự nhiên.
- Lũy thừa với số nguyên âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, với n là số tự nhiên.
- Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ với m, n là số tự nhiên.

Đặt biệt, khi $m = 1$ ta có $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2) Các tính chất cơ bản của Lũy thừa

- Tính chất 1:** $\begin{cases} a^0 = 1, \forall a \\ a^1 = a, \forall a \end{cases}$
- Tính chất 2** (tính đồng biến, nghịch biến): $\begin{cases} a > 1: a^m > a^n \Leftrightarrow m > n \\ 0 < a < 1: a^m > a^n \Leftrightarrow m < n \end{cases}$
- Tính chất 3** (so sánh lũy thừa khác cơ số): với $a > b > 0$ thì $\begin{cases} a^m > b^m \Leftrightarrow m > 0 \\ a^m < b^m \Leftrightarrow m < 0 \end{cases}$

Chú ý:

- + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.
- + Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3) Các công thức cơ bản của Lũy thừa

Nhóm công thức 1:

$$\begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \end{cases}$$

Nhóm công thức 2:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \longrightarrow \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \forall a, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \forall a \geq 0, b > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau :

a) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$

b) $a^{\pi} \cdot \sqrt[4]{a^2} : a^{4\pi}$

c) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$

d) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1,3} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$

Hướng dẫn giải:

a) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} (a^{-1})^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} a^{1-\sqrt{2}} = a$.

b) $a^{\pi} \cdot \sqrt[4]{a^2} : a^{4\pi} = a^{\pi} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{4\pi}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

c) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = a^3$

d) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1,3} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}} = \frac{a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1,3}}{a^{\sqrt{2}}} = a^{1,3}$

Ví dụ 2: Đơn giản các biểu thức :

a) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$

b) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$

c) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt{3}}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{7}}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2\sqrt{7}}{b^{\frac{2}{3}}}}$

d) $\sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi}$

Hướng dẫn giải:

a) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})} = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$

b) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}} = \frac{(a^{\sqrt{3}} - 1)(a^{\sqrt{3}} + 1)a^{\sqrt{3}}(a^{\sqrt{3}} + 1 + a^{2\sqrt{3}})}{a^{\sqrt{3}}(a^{\sqrt{3}} - 1)(a^{\sqrt{3}} + 1 + a^{2\sqrt{3}})} = (a^{\sqrt{3}} + 1)$

c) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt{3}}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{7}}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2\sqrt{7}}{b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}\right) \left(a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{7}}{b^{\frac{1}{3}}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}\right)}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt{3}}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{7}}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2\sqrt{7}}{b^{\frac{2}{3}}}} = a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

d) $\sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi} = \sqrt{a^{2\pi} + b^{2\pi} + 2a^\pi b^\pi - 4a^\pi b^\pi} = \sqrt{(a^\pi - b^\pi)^2} = |a^\pi - b^\pi|$

Ví dụ 3: Viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ các biểu thức sau :

a) $A = \sqrt[5]{2^3 \sqrt{2} \sqrt[3]{2}}$

b) $B = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} \quad (a > 0)$

c) $C = \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$

d) $D = \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} \quad (ab > 0)$

Hướng dẫn giải:

a) $A = \sqrt[5]{2^3 \sqrt{2} \sqrt[3]{2}} = \left\{ \left[\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \right]^{\frac{1}{5}} \right\} = \left[\left(2^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \right]^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{31}{25}} = 2^{\frac{3}{10}}$

b) $B = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = \left\{ \left[\left(a^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot a \right]^{\frac{1}{2}} \right\} : a^{\frac{11}{16}} = \left[\left(a^{\frac{3}{4}+1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot a \right]^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{11}{16}} = \left(a^{\frac{7}{8}+1} \right)^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{11}{16}} = \frac{a^{\frac{15}{16}}}{a^{\frac{11}{16}}} = a^{\frac{1}{4}}$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức sau :

a) $A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^{-1}$

b) $B = \left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}} \right) \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab} \right)$

Hướng dẫn giải:

a) $A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} = \frac{a-b-a+a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} \cdot \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^{-1}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

$$\text{b) } B = \left(\frac{\left(\frac{3}{a^4} - \frac{3}{b^4} \right) \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} \right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab} \right) = \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) (a - b)}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)} = a - b$$

Ví dụ 5: Đơn giản các biểu thức sau (với giả thiết chúng có nghĩa)

$$\text{a) } A = \left[\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} a} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{a}}{a \sqrt{b^3}} \right)^2 \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \quad \text{b) } B = \frac{a^2 + 4}{a \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a} \right)^2 + 4}}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } A = \left[\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} a} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{a}}{a \sqrt{b^3}} \right)^2 \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) = \left[\left(\frac{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{a}{a^2 b^3} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) = \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{ab^3}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^2 b^2 + 1}{ab^3 \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)}$$

$$\text{b) } B = \frac{a^2 + 4}{a \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a} \right)^2 + 4}} = \frac{a^2 + 4}{a \sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2} + 4}} = \frac{2|a|}{a} = \begin{cases} 2 & \Leftrightarrow a \geq 0 \\ -2 & \Leftrightarrow a < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 6: Cho a, b là các số dương. Rút gọn biểu thức sau :

$$\text{a) } \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} \right) \quad \text{b) } \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} \right) = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) \left[\left(\sqrt[3]{a} \right)^2 - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b} \right)^2 \right] = \left(\sqrt[3]{a} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{b} \right)^3 = a + b$$

$$\text{b) } \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{2a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, (coi các biểu thức đã tồn tại)

$$\text{a) } A = \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}. \quad \text{b) } B = \sqrt[5]{\frac{b}{3} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}. \quad \text{c) } C = \sqrt[5]{2^3 \sqrt[3]{2} \sqrt{2}}. \\ \text{d) } D = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}. \quad \text{e) } D = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}. \quad \text{f) } F = \frac{\sqrt[5]{b^2 \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \sqrt{b}}}.$$

Bài 2: Có thể kết luận gì về số a trong các trường hợp sau?

$$\text{a) } (a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}. \quad \text{b) } (2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}. \quad \text{c) } \left(\frac{1}{a} \right)^{-0,2} < a^2. \\ \text{d) } (1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}. \quad \text{e) } (2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2. \quad \text{f) } \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \left[\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right]^{-1} \\ \text{b) } B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$.

a) Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

b) Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2011}\right) + f\left(\frac{2}{2011}\right) + \dots + f\left(\frac{2010}{2011}\right)$.

Bài 5.1: So sánh các cặp số sau

a) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{4}}$ và $\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

d) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$

e) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$

Bài 5.2: So sánh các cặp số sau

a) $\sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[5]{20}$

b) $\sqrt[4]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt{17}$ và $\sqrt[3]{28}$

d) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$

Bài 6: Tìm x thỏa mãn các phương trình sau:

1) $4^x = \sqrt[5]{1024}$

2) $\sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{8}{125}$

3) $8^{1-3x} = \frac{1}{32}$

4) $(3\sqrt{3})^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$

5) $\left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{-x} = \frac{27}{64}$

6) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5x+6} = 1$

7) $\frac{1}{0,125} \cdot 32^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{8}}\right)^{-x}$

8) $0,2^x = \sqrt{0,008}$

9) $\left(\frac{9}{49}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

10) $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$

11) $7^{1-x} \cdot 4^{1-x} = \frac{1}{28}$