

Dạng 2: Phương pháp đặt 1 ẩn phụ (Tiếp theo các bài tập đã học)

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$

Hướng dẫn:

- Nhận xét trước khi giải:**

Ta nhận thấy điều sau: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}$
 $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$

Do đó ta chỉ cần đặt điều kiện cho $\sqrt{x+1}$ có nghĩa.

- Giải:**

Điều kiện: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x+1}$. Điều kiện: $t \geq 0$. Khi đó: $t^2 = x+1 \Leftrightarrow x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình trở thành: $\sqrt{t^2-1+2+2t} + \sqrt{t^2-1+2-2t} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t+1} + \sqrt{t^2-2t+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow |t+1| + |t-1| = 2 \Leftrightarrow (|t+1| + |t-1|)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |t^2-1| = 1-t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2 \geq 0 \\ \begin{cases} t^2-1 = 1-t^2 \\ t^2-1 = -1+t^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [-1;1] \\ \begin{cases} t = \pm 1 \\ t \in R \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t \in [-1;1]$$

Vì $t \geq 0$ nên $t \in [0;1]$. Với $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Kết hợp (*) ta được: $x \in [-1;0]$.

Vậy phương trình có tập nghiệm: $T = [-1;0]$.

- Chú ý khi giải xong:** Ta có thể sử dụng kiến thức sau: $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$. $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$. Do đó: $|t^2-1| = 1-t^2 \Leftrightarrow |t^2-1| = -(t^2-1) \Leftrightarrow t^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-1;1]$

b) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$

Đs: $T = [0;3]$

c) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \frac{x+5}{2}$

Đs: $T = \{-1;3\}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1$

Giải:

Điều kiện: $x - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$ (*)

Khi đó: $pt(a) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x-\frac{1}{x}} - 3 = 0$ (**Hướng dẫn:** Chia 2 vế phương trình cho x . Do $x \neq 0$ nên ta không xét trường hợp $x = 0$ và $x \neq 0$)

Đặt $t = \sqrt{x-\frac{1}{x}}$ ($t \geq 0$). Khi đó pt trở thành: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$

Với t ta đi tìm x .

* **Chú ý:** Dấu hiệu nào của phương trình gợi ý cách giải chia 2 vế cho x ?

b) $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$

Đs: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

c) $4x^2 - x + 4 = 3x\sqrt{x + \frac{1}{x}}$

Đs: $x \in \emptyset$

d) $4x^2 - 3x - 4 = \sqrt[3]{x^4 - x^2}$

Đs: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

e) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$

Đs:

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$

Đs: $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; 1$

Hd: $pt(a) \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} + x = 2x\sqrt{2-x^2}$. Đặt $t = x + \sqrt{2-x^2}$

b) $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$

Đs: $\sqrt{2}$

c) $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$

Đs: -2

Hd: Đặt $t = \sqrt{6-5x}$. Khi đó $x = \frac{6-t^2}{5}$. Thay vào phương trình (c) rồi giải.

d) $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$

Đs: 0

----- Hết -----