

Hướng dẫn giải các bài tập hệ phương trình mũ + logarit

Bài 17) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^x - e^y = (\ln y - \ln x)(1 + xy) & (1) \\ 2^{\ln x + 2\ln y} - 3 \cdot 4^{\ln x} = 4 \cdot 2^{\ln y} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x > 0, y > 0$ (*). Khi đó: $1 + xy > 0$

Xét pt (1): $e^x - e^y = (\ln y - \ln x)(1 + xy)$

* TH1: $x > y$

Khi đó: $x > y \Rightarrow \begin{cases} e^x > e^y \Rightarrow e^x - e^y > 0 \\ \ln x > \ln y \Rightarrow \ln y - \ln x < 0 \end{cases}$

Do đó pt (1) vô nghiệm khi $x > y$.

* TH2: $x < y$

Khi đó: $x < y \Rightarrow \begin{cases} e^x < e^y \Rightarrow e^x - e^y < 0 \\ \ln x < \ln y \Rightarrow \ln y - \ln x > 0 \end{cases}$

Do đó pt (1) vô nghiệm khi $x < y$.

* TH3: $x = y$

Với $x = y$ thì (1) thỏa mãn. Thay vào (2) ta được: $2^{3\ln x} - 3 \cdot 4^{\ln x} = 4 \cdot 2^{\ln x} \Leftrightarrow 2^{3\ln x} - 3 \cdot 2^{2\ln x} - 4 \cdot 2^{\ln x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\ln x} = 0 \\ 2^{\ln x} = -1 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 = y \text{ (thỏa (*))} \\ 2^{\ln x} = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (e^2; e^2)$.

Bài 19) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải: Hệ phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 3^{y-1} \\ y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 3^{x-1} \end{cases}$

Đặt $u = x - 1; v = y - 1$. Khi đó hệ phương trình trở thành:
$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v & (2) \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (3) ta được: $u - v + \sqrt{u^2 + 1} - \sqrt{v^2 + 1} = 3^v - 3^u \Leftrightarrow 3^u + u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v + v + \sqrt{v^2 + 1}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t + \sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = 3^t \ln 3 + \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}}$

Vì $t^2 + 1 > t^2 \forall t \in \mathbb{R}$ nên $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} = |t| \geq -t$. Do đó: $\sqrt{t^2 + 1} + t > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó pt (*) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Thay $u = v$ vào pt (1) ta được: $u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 1} + u = 3^u \Leftrightarrow 1 = 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u)$ (**)

Ta nhận thấy $u = 0$ là nghiệm của pt (**).

Xét hàm số $g(u) = 3^u \cdot (\sqrt{u^2 + 1} - u)$ với $u \in \mathbb{R}$

Ta có: $g'(u) = 3^u \ln 3 \cdot (\sqrt{u^2 + 1} - u) + \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} - 1 \right) 3^u = 3^u \cdot (\sqrt{u^2 + 1} - u) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) > 0 \forall u \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra pt (**) có nghiệm duy nhất $u = 0 \Rightarrow v = 0$

Với $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ thì ta được $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 20) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - 4)(x + 1) = y(y + 5) & (1) \\ \log_{(x-2)}(y + 2) = \frac{x - 2}{y^2} & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Điều kiện: $\begin{cases} x > 2; x \neq 3 \\ y > -2; y \neq 0 \end{cases}$

Xét pt(1): $(x - 4)(x + 1) = y(y + 5) \Leftrightarrow x^2 - 3x - y^2 - 5y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 8y + 16) - 3x + 3y + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - (y + 4)^2 - 3(x - y - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - y - 4)(x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \text{ (loại)}$

Thay $x = y + 4$ vào pt (2) ta được kết quả.

Bài 21) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y & (1) \\ (x^2y + 2x)^2 + 1 = 2x(xy + 2) & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Điều kiện: $x \neq 0$.

Pt(2) $\Leftrightarrow (x^2y + 2x)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (x^2y + 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2y + 2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 - 2x}{x^2}$

Thay vào pt (1) ta được: $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{x - 2x^2}{x^2} + \frac{3}{2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{2x - x^2}{2x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}}$
 $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - x^2}{x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2x}{x^2} \right) = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - x^2}{x^2} \right) = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2x}{x^2} \right)$

Xét $f(t) = 2^t + \frac{1}{2}t$ với $t \in \mathbb{R} \dots$

Bài 22) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \ln \sqrt{x} - \ln \sqrt{y} = \frac{1}{2}(xy + 1)(y - x) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Thay (2) vào (1) ta được: $\ln \sqrt{x} - \ln \sqrt{y} = \frac{1}{2}(xy + x^2 + y^2)(y - x) \Leftrightarrow \ln x - \ln y = y^3 - x^3$

$\Leftrightarrow x^3 + \ln x = y^3 + \ln y$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + \ln t$ với $t > 0$. **Đs:** $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

===== **Hết** =====